Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
21.04.2022

Lineare Algebra II
Blatt 3

---

1 | Normalform

Bestimmen Sie die Hessenormalformen der folgenden affinen Hyperebenen.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x + 4y = 2 \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y + z = 5 \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x + iy + (2 + 3i)z = 7 \right\}$

2 | Gram und Schmidt

Zeigen Sie, dass die folgende 4×4-Matrix ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ definiert. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Um zu zeigen, dass die durch die Matrix definierte Bilinearform positiv definit ist, können Sie das Kriterium aus Aufgabe 4 verwenden.)

3 | Naturprodukt

Das Kreuzprodukt ist bekanntlich eine Verknüpfung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Vielleicht war sie Ihnen bislang sympathischer als manch andere Verknüpfung aus der Vorlesung. Das könnte sich jetzt ändern.

(a) Ist das Kreuzprodukt assoziativ?

(b) Ist das Kreuzprodukt kommutativ?

(c) Gibt es für das Kreuzprodukt ein neutrales Element? *Tipp: Schauen Sie sich zunächst die nachfolgenden Aufgabenteile an, wenn Sie hier nicht weiterkommen.*

(d) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt distributiv ist: für beliebige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$$

(e) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

4 | Hauptminorenkriterium

In dieser Aufgabe werden Sie insbesondere die (für Aufgabe 2 nützliche) Implikation ($\Leftarrow$) des folgenden Kriteriums beweisen.

> Die durch eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix definierte Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ ist genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren der Matrix positiv sind.

Ein **Minor** einer $n \times n$-Matrix M ist die Determinante einer kleineren quadratischen Matrix, die aus M durch das Entfernen gewisser Spalten und Zeilen hervorgeht. Der k-te **führende Hauptminor** ist die Determinante der $k \times k$-Untermatrix von M, die aus M hervorgeht, indem wir alle Zeilen und Spalten außer den linkesten k Spalten und obersten k Zeilen entfernen.

(a) Beweisen Sei eine allgemeine Variante des Kriteriums für Diagonalmatrizen: Sei β eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V. Sei $B := (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ eine Basis von V derart, dass die darstellende Matrix $M_B(\beta)$ eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie, dass β genau dann positiv definit ist, wenn alle Einträge von $M_B(\beta)$ positiv sind.

(b) Sei nun M eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, deren führende Hauptminoren positiv sind. Beweisen Sie durch Induktion über n, dass die assozierte Bilinearform $\beta := \beta_M$ auf $\mathbb{R}^n$ positiv definit ist. Gehen Sie dabei im Induktionsschritt wie folgt vor:

1. Nutzen Sie die Induktionsvoraussetzung, um zu zeigen, dass die Einschränkung von β auf $\mathbb{R}^{n-1} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$ positiv definit ist.
2. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}^n$ eine Basis $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{e}_n)$ mit den folgenden Eigenschaften besitzt: $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1})$ ist eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^{n-1}, \beta|_{\mathbb{R}^{n-1}})$, $\mathbf{e}_n$ ist der n-te Standardbasisvektor.
3. Folgern Sie, dass $M_B(\beta)$ die folgende Form hat:
$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-1} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & d \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ und } d \in \mathbb{R}$$
4. Zeigen Sie außerdem, dass $M_B(\beta)$ eine positive Determinante hat.
5. Zeigen Sie, dass auch $B' := (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{b}_i)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.
6. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{B'}(\beta)$.
7. Folgern Sie endlich, dass β positiv definit ist.